Задача про екстремальне розбиття комплексної площини (присвячується 80-річчю від дня народження І.П. Мельниченка)

Ярослав Заболотний, Ірина Денега

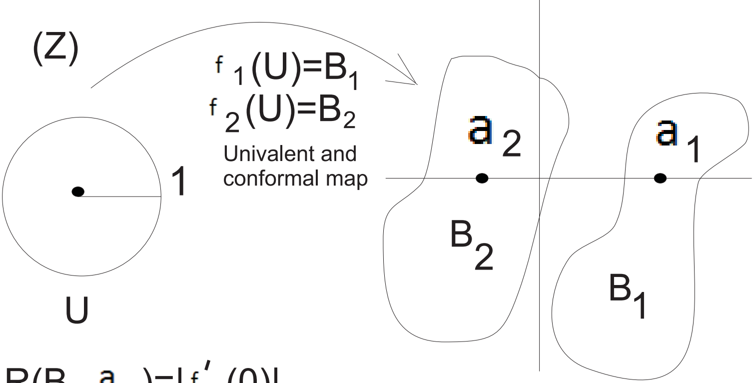
Інститут математики НАН УКраїни

Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$ – множини натуральних і комплексних чисел, відповідно, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ – розширена комплексна площина або сфера Рімана, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.
$r(B, a)$ – внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, відносно точки $a \in B$. Внутрішній радіус області B пов'язаний з узагальненою функцією Гріна $g_B(z, a)$ області B співвідношеннями

$$g_B(z, a) = -\ln|z - a| + \ln r(B, a) + o(1), \quad z \to a,$$

$$g_B(z, \infty) = \ln|z| + \ln r(B, a) + o(1), \quad z \to \infty.$$

$$W = f_1(Z)\,; \quad f_1(0) = a_1$$
$$W = f_2(Z)\,; \quad f_2(0) = a_2$$



$$R(B_1, a_1) = |f_1'(0)|$$
$$R(B_2, a_2) = |f_2'(0)|$$

Conformal radii

$$B_1 \cap B_2 = \varnothing$$

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Система точок $A_n := \left\{ a_k \in \mathbb{C} : k = \overline{1,n} \right\}$, називається n-променевою, якщо $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1,n}$,

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi.$$

Позначимо при цьому $a_{n+1} := a_1$, $\alpha_k := \frac{1}{\pi} \arg \frac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$.

Системою неперетинних областей

називається скінченний набір довільних областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ таких, що $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m = \emptyset$, $k \neq m$, $k,m = \overline{1,n}$.

Розглянемо екстремальну задачу змішаного типу, тобто задачу, в якій частина полюсів фіксована, а частина має певний ступінь "вільності". Наведемо цю задачу, яку було сформульовано в 1994 році в роботі[1] , стр. 68, 9.2 у списку нерозв'язаних проблем, а потім повторено в 2014 році в монографії [2].

[1]Дубинин В.Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – 49, № 1(295). – С. 3 – 76.

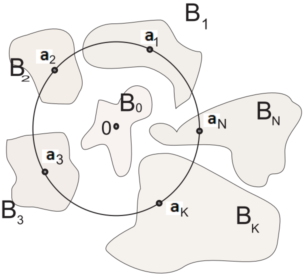
[2]Dubinin V.N. Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory. Birkhäuser/Springer, Basel. 2014, 344 p.

Задача 1. Довести, що максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

де B_0, B_1, B_2,...,B_n, $(n \geq 2)$ – попарно неперетині області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $r(B_j, a_j)$ – внутрішній радіус області B_j в точці a_j $(a_j \in B_j)$, $j = \overline{0,n}$ і $\gamma \leq n$ досягається для деякої конфігурації областей, які мають n-кратну симетрію. Див. Рис.

Задача 1 має розв'язок тільки при $\gamma \leqslant n$.



М.О. Лаврентьєв [20] в 1934 році розв'язав задачу про добуток конформних радіусів двох взаємно неперетинних однозв'язних областей. Має місце наступний результат.

Теорема. Нехай a_1 і a_2 – деякі фіксовані точки комплексної площини $\mathbb{C}$, B_k, $a_k \in B_k$, $k = 1,2$ — довільні взаємно неперетинні області на $\overline{\mathbb{C}}$, і функції $f_k(z)$, $k = 1,2$ регулярно відображають одиничний круг $\{z : |z| < 1\}$ на області B_k, $k = 1,2$ так, що $f_k(0) = a_k$, $k = 1,2$. Тоді справедлива нерівність

$$\left|f_1'(0)\right| \cdot \left|f_2'(0)\right| \leq |a_1 - a_2|^2.$$

Причому для областей B_k, $k = 1,2$, знак рівності в нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли області B_1, B_2 обмежені прямою $\left|\frac{z-a_1}{z-a_2}\right| = 1$.

Виникало запитання: чи можна узагальнити даний результат на деякий ширший клас областей. Подальші дослідження показали, що відповідь на дане запитання позитивна.
Далі дуже багато авторів займалися цією тематикою: Н.А. Лебедев, В.К. Хейман, Г.М. Голузін, П.М. Тамразов, П.П. Куфарев, А.Е. Фалес, Н.І. Колбіна, Дж. Дженкінс, Ю.Є. Аленіцин, І.А. Александров, В.А. Андреєв, Г.П. Бахтіна, О.К. Бахтін, В.М. Дубинін, Н.І. Колбіна, З. Нехарі, І.П. Мітюк, Г.В. Кузьміна, С. І. Федоров, Є. Г. Емельянов, Л.В. Ковальов, М. Шиффер, П. Л. Дюрен та інші.

В 1975 році М.О. Лєбєдєв [24, с. 32–33] розглядав більш загальну екстремальну задачу про добуток конформних радіусів:
Задача 2. На площині w дано n різних фіксованих точок a_k, $k=\overline{1,n}$, $n>3$. Функції $w=f_k(z)$, $k=\overline{1,n}$, регулярні в крузі $|z|<1$ однолисто відображають круг $|z|<1$ на неперетинні області B_k, які містять відповідні точки a_k, $k=\overline{1,n}$, і причому так, що $f_k(0)=a_k$, $k=\overline{1,n}$. Що можна сказати про максимум добутку

$$\prod_{k=1}^{n} |f_k'(0)|^{\gamma_k} \longrightarrow \max, \quad \gamma_k>0, n>3$$

відносно всеможливих функцій $f_k(z)$, $k=\overline{1,n}$?

Однак, ця задача в загальному випадку не розв'язана до цих пір, вдалося отримати її розв'язок тільки в часткових випадках. Ця задача є безпосереднім узагальненням попередніх результатів М.О. Лаврентьєва, Г.М. Голузіна, З. Нехарі, Дж. Дженкінса.

До середини 70-х р.р. у більшості роботах точка $z = 0$ при відображенні функціями переходила в деякі різні, але фіксовані точки a_k, $k = \overline{1, n}$, комплексної площини.
В 1968 році П.М. Тамразов [3] висунув ідею, яка полягала у тому, що точкам a_k, $k = \overline{1, n}$, можна надавати деяку "свободу". В цій роботі П.М. Тамразов вперше розглянув та повністю розв'язав одну дуже важливу екстремальну задачу геометричної теорії функцій комплексної змінної з п'ятьма простими полюсами.
В 1975 році у відповідності з цією ідеєю Г.П. Бахтіна [29] у своїй дисертації вперше поставила та розв'язала ряд екстремальних задач на класі взаємно неперетинних областей з так званими "вільними" полюсами.

[3] Тамразов П.М. Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов // Изв. АН СССР. Серия мат. – 1968. – 32, № 5. – С. 1033 – 1043.

В 1975 році в роботах Г.П. Бахтіної [4],[5] можна вже побачити перші спроби розгляду задач близьких до постановки вище вказаної проблеми В.М. Дубініна. В 1981 році в роботі [6] Г.П. Бахтіної була сформульована екстремальна задача, яка у випадку однозв'язних областей та деяких додаткових обмежень співпадає з вище сформульованою проблемою В.М. Дубініна [26]. Природньо, що в 1974 році ще не були готові методи для успішного просування задач подібного типу. В роботах Г.П. Бахтіної вдалося розв'язати цю проблему тільки при початкових значеннях параметра n, а саме $n = 1, 2$.

[4] Бахтина Г.П. Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.

[5] Бахтина Г.П. Об экстремизации некоторых функционалов в задаче о неналегающих областях // Укр. мат. журн. – 1975. – 27, № 2. – С. 202 – 204.

[6] Бахтина Г.П. Экстремумы коэффициентов однолистных функций без общих значений // Геометрическая теория функций и топология : Сб.науч. трудов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. – С. 9 – 15.

В.М. Дубінін в роботі [25] розв'язав Задачу 1 при $\gamma = 1$ для $n \geqslant 2$.
Л.В. Ковальов [7] в 1996 році отримав розв'язок Задачі 1 при певних обмеженнях на геометрію розташування систем точок на одиничному колі, а саме для таких систем точок для яких виконується наступна нерівність

$$0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}, \quad k = \overline{1,n}, \quad n \geqslant 5.$$

Слід відмітити, що результат роботи Ковальова [34] цікавий як сам по собі, так і методом дослідження. Дійсно, як виявляється із його методу можна дати оцінки при $n = 2, 3, 4$, які не розглянуті в теоремі Л.В. Ковальова. Більше того, з методу роботи [34] випливає, що результат теореми 4 [25] про оцінку функціонала (5) має місце при всіх $\gamma \in [0, 1]$.
В 2003 році Г.В. Кузьміна [35] також підтвердила результат теореми 4 [25] для однозв'язних областей іншим методом.

[7] Ковалев Л.В. К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности. // Дальневосточный матем. сборник. – 1996. – 2. – С. 96 – 98.

Далі в 2008 році О.К. Бахтін[8] запропонував метод "керуючих" функціоналів, який дав змогу послабити вимоги на геометрію розташування систем точок. Завдяки цьому вдалося узагальнити постановку задачі В.М. Дубініна. В монографії О.К. Бахтіна було доповнено ідеї і методи роботи[9] і таким чином доведено гіпотезу Дубініна для довільного $\gamma \in \mathbb{R}^+$, але починаючи з деякого заздалегідь невідомого номеру $n_0(\gamma)$.

[8] Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б. Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе. // Праці ін-ту мат-ки НАН Укр. – 2008. – 308 с.

[9] Дубинин В.Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного// Успехи мат. наук. – 1994. – 49, № 1(295). – С. 3 – 76.

Лема 1.

Нехай B_0, B_1, B_2,...,B_n, $(n \geq 2)$ - попарно неперетині області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $(a_j \in B_j)$, $j = \overline{0,n}$ і $q > 0$, $q \in \mathbb{R}$, $r(B_j, a_j)$ - внутрішній радіус області B_j в точці a_j $(a_j \in B_j)$ і $\gamma < n$. Тоді при умові, що $r(B_0, a_0) \geq q^{\frac{1}{\gamma - n}}$ виконується нерівність

$$r^{\gamma}(B_0, a_0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq q.$$

Теорема 1.

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq n \leq 4$, $\gamma_2 = 1,4$, $\gamma_3 = 1,7$, $\gamma_4 = 2,09$. Тоді при $0 < \gamma \leq \gamma_n$ виконується нерівність

$$r^{\gamma}(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq r^{\gamma}(D_0, a_0^0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k^0), \tag{1}$$

де $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n$ — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_j \in B_j$ при $j = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$ при $k = \overline{1,n}$, причому знак рівності досягається, зокрема, за умов $a_k = a_k^0$, $B_k = D_k$ при $k = \overline{0,n}$, де a_k^0 і D_k — відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2. \tag{2}$$

Структура траєкторій квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}dw^2$$

схематично показана на Рисунках.

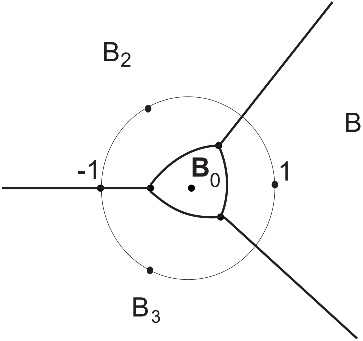


Рис.: $n = 3$ і $\gamma > 1$

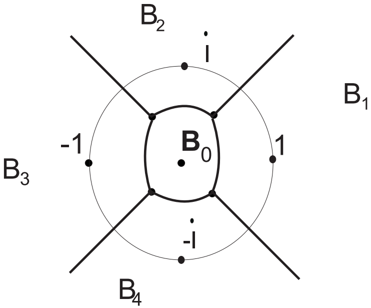


Рис.: $n = 4$ і $\gamma > 1$

В статті[10] отримано частковий розв'язок задачі 1 для $n \geq 5$ і $0 \leq \gamma \leq \sqrt[4]{n}$.

Теорема 2. [5]

Для довільного натурального $n \geq 5$ і $0 < \gamma \leq \sqrt[4]{n}$ виконується нерівність

$$r^{\gamma}(B_0, a_0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq r^{\gamma}(D_0, a_0^0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k^0),$$

де B_0, B_1, B_2,...,B_n – попарно неперетині області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1,n}$, $r(B_j, a_j)$ – внутрішній радіус області B_j в точці a_j $(a_j \in B_j)$, $j = \overline{0,n}$, причому знак рівності досягається, зокрема, за умов $a_k = a_k^0$, $B_k = D_k$, $k = \overline{0,n}$, де a_k^0, D_k, – відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}dw^2. \quad (3)$$

[10] Заболотний Я.В. Застосування розділяючого перетворення в одній задачі про неперетинні області// Доп. Нац. Акад. наук України. – 2011. – № 9. – С. 13 – 17.

В роботі [11], виконавши технічні покращення методу дослідження теореми 1, вдалося отримати розв'язок задачі 1 для $n \geq 5$ і $0 < \gamma \leq \sqrt[3]{n}$.

Теорема 3. [6]

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = \sqrt[3]{n}$. Тоді для будь-якої n-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ такої, що $|a_k| = 1$, і будь-якого набору взаємно неперетинних областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ $(k = \overline{1,n})$, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак рівності в якій досягається тоді, коли точки a_k і області B_k, $k = \overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

[11] Денега И.В. Квадратичные дифференциалы и разделяющее преобразование в экстремальных задачах о неналегающих областях // Доп. НАН України. – 2012. – №4. – С. 15 — 19.

В 2013 році в роботі[12] було отримано розв'язок Задачі 1 для $n \geq 5$ і $0 < \gamma \leq n^{0,38}$.

Теорема 4. [13]

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0,38}$. Тоді для будь-якої n-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ такої, що $|a_k| = 1$, і будь-якого набору взаємно неперетинних областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0$, $(k = \overline{1,n})$, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}(B_0,0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}(D_0,0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k),$$

де D_k, d_k, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, — кругові області та полюси квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}dw^2.$$

[12] Бахтин А.К., Денега И.В. Об одной проблеме В.Н. Дубинина. Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – 2013. – Т.10, № 4-5. – С. 401 – 411.

Теорема 5. [a]

[a] Y. Zabolotnii, I. Dvorak. Some evaluation of maximum of the product of conformal radii for pairwise non-overlapping domains // Lobachevskii Journal of Mathematics, 38 (3), 554–559, 2017.

Для довільного натурального $n \geq 128$ і $0 < \gamma \leq \sqrt{n}$ виконується нерівність

$$r^{\gamma}(B_0,a_0)\cdot\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leq r^{\gamma}(D_0,a_0^0)\cdot\prod_{k=1}^{n} r(D_k,a_k^0)$$

де B_0, B_1, B_2,...,B_n, $(n \geq 2)$ - попарно неперетині області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1,n}$, $r(B_j,a_j)$ - внутрішній радіус області B_j в точці a_j $(a_j \in B_j)$, $j = \overline{0,n}$, причому знак рівності досягається, зокрема, за умов $a_k = a_k^0$, $B_k = D_k$, $k = \overline{0,n}$, де a_k^0, D_k, – відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}dw^2.$$

$$I_n^0(\gamma) = r^\gamma(D_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(D_k,d_k),\; Q_n(\gamma) = \frac{\left[2\cdot 2^{n-1}\cdot\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\left(2-\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^n\cdot\frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\cdot\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}.$$

Теорема 6. [a]

[a] I.V. Denega, Ya.V. Zabolotnii, Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane // Complex Variables and Elliptic Equations, Feb. 2017

Нехай $n \geq 6$ – фіксоване натуральне число і $\gamma > 1$ - дійсне число. Тоді для довільної конфігурації областей B_k і точок a_k $(k = \overline{0,n})$, які задовольняють всі умови задачі 1, а також при умові $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, правильна нерівність

$$\frac{r^\gamma(B_0,a_0)\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)}{I_n^0(\gamma)} \leq Q_n(\gamma). \tag{4}$$

Якщо, до того ж, γ_n^0 – корінь рівняння $Q_n(\gamma) = 1$, то для довільного γ_n такого, що $1 \leq \gamma_n < \gamma_n^0$ буде виконуватися нерівність $\frac{I_n(\gamma_n)}{I_n^0(\gamma_n)} < 1$.

Теорема 7.

Для довільного $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$ існує натуральне n_0 таке, що для всіх $n \geq n_0$ і $0 < \gamma \leq n^{\alpha}$ виконується нерівність

$$r^{\gamma}(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq r^{\gamma}(D_0, a_0^0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k^0)$$

де B_0, B_1, $B_2, \ldots, B_n$ – попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_j \in B_j$ при $j = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$ при $k = \overline{1, n}$, причому знак рівності досягається, зокрема за умов $a_k = a_k^0$, $B_k = D_k$ при $k = \overline{0, n}$, де a_k^0 і D_k — відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}dw^2.$$

Крім того, можна покласти $n_0 = \left[e^{\frac{1}{(\frac{2}{3}-\alpha)^2}}\right] + 1$.

В 2012 році в [13] був отриманий умовний результат.

Теорема 8. [9]

Нехай $n = 2, 3, 4$, $\gamma_2 = 1,6$, $\gamma_3 = 2,8$, $\gamma_4 = 4$, $0 < \gamma \leqslant \gamma_2$. Тоді для довільної n-променевої системи точок $A_2 = \{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k| = 1$, такої, що $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$ і для будь-якого набору взаємно неперетинних областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}(B_0, a_0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq r^{\gamma}(D_0, a_0^0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k^0),$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, коли a_k і B_k, $k = \overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

[13] Bakhtin A. and Denega I. Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane // Bulletin de la societe des sciences et des lettres de Lodz, Recherches sur les deformations. – 2012. — V. LXII, no. 2. -– P.83 — 92.

Теорема 9. [a]

[a] Aleksandr K. Bakhtin, Liudmyla V. Vygivska, Iryna V. Denega. Inequalities for the internal radii of non-overlapping domains // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 220, No. 5, February, 2017, P. 584–590.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_4 = 4,17$, $\gamma_5 = 5,71$, $\gamma_6 = 7,5$, $\gamma_7 = 9,53$, $\gamma_8 = 11,81$, а $\gamma_n = 0,12n^2$ при $n \geqslant 9$. Тогда для любых различных точек единичной окружности $|a_k| = 1$ таких, что $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$ и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \qquad (5)$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда a_k и B_k, $k = \overline{0,n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Введемо функцію

$$P_\delta(x) = 2^{x^2+6} \cdot x^{x^2+2-2\delta} \cdot (2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}(2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2}, \quad x \in (0,2], \quad 0 \leqslant \delta \leqslant 1.$$

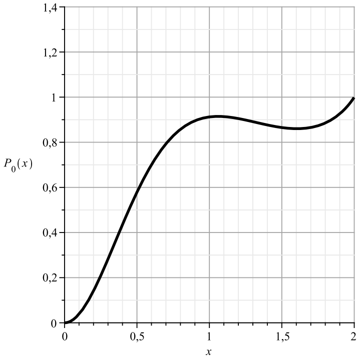


Рис.: Графік функції $P_\delta(x)$ при $\delta = 0$

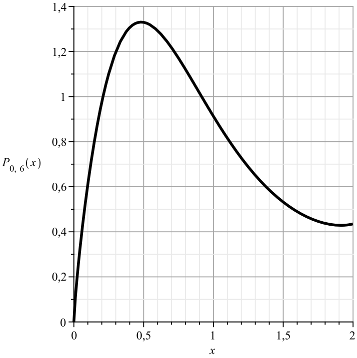


Рис.: Графік функції $P_\delta(x)$ при $\delta = 0,6$

Теорема 10. [a]

[a] Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Денега И.В. Разделяющее преобразование в задачах об экстремальном разбиении комплексной плоскости // Аналіз та застосування / Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – 2015. – Т.12, №3. – С. 17 – 23.

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (0,1]$, $0 \leqslant \delta \leqslant 0,7$. Тоді для будь-якої системи різних точок одиничного кола $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ і будь-якого набору взаємно неперетинних областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant \gamma^{-\frac{\delta \cdot n}{2}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{\delta} \cdot \left[P_{\delta}\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{n}{2}}.$$

Знак рівності в якій досягається при тих же умовах, що і в теоремі 9.

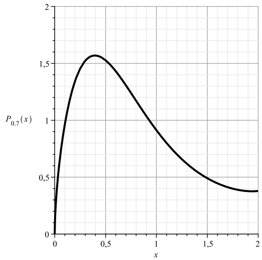


Рис. 25. Графік функції $P_\delta(x)$ при $\delta = 0,7$

Теорема 11. [a]

[a] A.K. Bahtin, Ya.V. Zabolotnii. Estimates of a product of the inner radii of nonoverlapping domains//Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Volume 221, no.5, – p. 623–629.

Пусть B_0, B_1, $B_2,...,B_n$, $(n \geq 2)$ - попарно неналегающие области в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1,n}$, причем $r(B_0,a_0) \leq 1$. Тогда для любого натурального n, $n \geq 76$ и произвольного вещественного γ такого, что $1 < \gamma \leq n$ справедливо неравенство

$$r^\gamma(B_0,a_0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leq I_n^0(\gamma). \quad (6)$$

Теорема 12. [a]

[a] Я.В. Заболотный, Л.В. Выговская. О произведении внутренних радиусов симметрических многосвязных областей // Український математичний вісник, Том.14 (2017), №. 3, с. 441–452.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0,1)$. Тогда для произвольного набора точек a_k, таких, что $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1,n}$, и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, причем области B_k, $k = \overline{1,n}$, обладают симметрией относительно единичной окружности $|w| = 1$, справедливо неравенство

$$r^\gamma(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{1-\frac{2\sqrt{\frac{\gamma}{2}}}{n}}{1+\frac{2\sqrt{\frac{\gamma}{2}}}{n}}\right)^{2\sqrt{\frac{\gamma}{2}}}. \tag{7}$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда a_k и B_k, $k = \overline{0,n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}dw^2. \tag{8}$$

Література I

- Бахтин А.К., Денега И.В. Некоторые оценки функционалов для N-лучевых систем точек // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2011. – Т.8, №1. – С. 12 – 21.
- Denega I.V. Some extremal problems on non-overlapping domains with free poles // Bulletin de la societe des sciences et des lettres de Lodz, Recherches sur les deformations. — 2011. — V. LXI, № 3. -– P.103 — 114.
- Заболотний Я.В. Деякі екстремальні задачі геометричної теорії функцій// Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2011. – Т.8, №1. – С. 88 – 97.
- Заболотний Я.В. Застосування розділяючого перетворення в задачах про неперетинні області// Доп. Нац. Акад. наук України. – 2011. – № 4. – С. 20 – 24.
- Заболотний Я.В. Застосування розділяючого перетворення в одній задачі про неперетинні області// Доп. Нац. Акад. наук України. – 2011. – № 9. – С. 13 – 17.

Література II

- Денега И.В. Квадратичные дифференциалы и разделяющее преобразование в экстремальных задачах о неналегающих областях // Доп. НАН України. — 2012. — №4. — С. 15 — 19.
- Денега И.В. Некоторые неравенства для внутренних радиусов частично неналегающих областей // Доп. НАН України. – 2012. – №5. – С. 19 – 22.
- Заболотний Я.В. Про одну екстремальну задачу В.М. Дубініна // Укр. мат. журн. – 2012. – Т. 64, № 1. – С. 24—31.
- Бахтин А.К., Денега И.В. Метод разделяющего преобразования в задачах о максимуме произведения степеней внутренних радиусов неналегающих областей // Аналіз і застосування / Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2012. – Т.9, №2. – С. 32 – 44.
- Bakhtin A. and Denega I. Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane // Bulletin de la societe des sciences et des lettres de Lodz, Recherches sur les deformations. – 2012. — V. LXII, no. 2. -– P.83 — 92.

Література III

- Денега І.В. Розділяюче перетворення в геометричної теорії функцій комплексної змінної. Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 2012. – 16 с.
- Denega I. Generalization of some extremal problems on non-overlapping domains with free poles. Annales universitatis Mariae Curie-Skladovska, Lublin-Polonia. – 2013. – V. LXVII, no. 1. – P. 11 – 22.
- Бахтин А.К., Денега И.В. Об одной проблеме В.Н. Дубинина Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2013. – Т.10, № 4-5. – С. 401 – 411.
- Денега И.В. Об одной экстремальной задаче о частично неналегающих областях Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2013. – Т.10, №4-5. – С. 442 – 449.
- Охрименко С.А., Таргонский А.Л. Экстремальные задачи на лучевых систем // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – № 4-5. – с. 486–495.

Література IV

- Заболотний Я.В. Задача про обчислення максимуму добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей на комплексній площині// Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування / Збірник праць Ін-ту матем. НАН України. - К.: Ін-т матем. НАН України, 2013. – Т.10, № 4-5. – С. 557 – 564.
- Бахтін О.К., Заболотний Я.В. Оцінки добутку внутрішніх радіусів трьох неперетинних областей // Доп. Нац. Акад. наук України. – 2013. – № 10. – С. 7 – 10.
- Заболотний Я.В. Екстремальні задачі геометричної теорії функцій комплексної змінної. Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 2014. – 16 с.
- Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б. Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе. // Праці ін-ту мат-ки НАН Укр. – 2008. – 308 с.
- Лаврентьев М.А. К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – 5. – С. 159 – 245.
- ГолузинГ.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.:Наука, 1966.—628с.

Література V

- Хейман В.К. Многолистные функции. - М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.
- Дженкинс Дж.А. Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Издательство иностр.лит., 1962.—256с.
- Лебедев Н. А. Принцип площадей в теории однолистных функций / Н. А. Лебедев. — М.: Наука, 1975. — 336 с.
- Дубинин В.Н. Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении// Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – 168. – С. 48 – 66.
- Дубинин В.Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного// Успехи мат. наук. – 1994. – 49, № 1(295). – С. 3 – 76.
- Дубинин В.Н., Прилепкина Е.Г. Об экстремальном разбиении пространственных областей // Зап. науч. семин. ПОМИ. — 1998. — Т.254. — С. 95 — 107.

Література VI

- Дубинин В.Н. Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного. // Владивосток "Дальнаука"ДВО РАН – 2009. – 390с.
- Бахтина Г.П. Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.
- Бахтина Г.П. Об экстремизации некоторых функционалов в задаче о неналегающих областях // Укр. мат. журн. – 1975. – 27, № 2. – С. 202 – 204.
- Бахтина Г.П. Экстремумы коэффициентов однолистных функций без общих значений // Геометрическая теория функций и топология : Сб.науч. трудов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. – С. 9 – 15.
- Тамразов П.М. Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов // Изв. АН СССР. Серия мат. – 1968. – 32, № 5. – С. 1033 – 1043.

Література VII

Дубинин В.Н. О произведении внутренних радиусов "частично неналегающих" областей // Вопросы метрической теории отображений и ее применение. – Киев: Наук. Думка, 1978. – С. 24 – 31.

Ковалев Л.В. К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности. // Дальневосточный матем. сборник. – 1996. – 2. – С. 96 – 98.

Кузьмина Г.В. Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2001. – 276. – С. 253 – 275.